

Chapitre 7

Fonctions usuelles

Plan du chapitre

1	Fonction réciproque	2
1.1	Fonction qui réalise une bijection	2
1.2	Définition de f^{-1}	3
1.3	Théorème de la bijection monotone et dérivée de f^{-1}	4
2	Logarithme et exponentielle	5
2.1	Logarithme.	5
2.2	Exponentielle.	6
3	Puissance.	8
3.1	Fonction puissance entière	8
3.2	Fonction puissance rationnelle (dont racine n -ième)	8
3.3	Fonction puissance réelle	9
3.4	Fonction puissance x (ou exponentielle généralisée)	10
4	Croissances comparées	10
5	Fonctions circulaires	11
6	Fonctions circulaires réciproques	12
6.1	Fonction arcsinus	12
6.2	Fonction arccosinus	14
6.3	Fonction arctangente	15
7	Fonctions hyperboliques	19
7.1	Fonctions ch et sh	19
7.2	Fonction th.	20
8	Fonctions exponentielles complexes	21
9	Méthodes pour les exercices.	22

Hypothèse

D et D' désignent des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non vides.

I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux (i.e. non vides et non singletons).



1 Fonction réciproque

1.1 Fonction qui réalise une bijection

Définition 7.1

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset D$. L'ensemble des valeurs prises par f sur I est un ensemble noté

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I \quad y = f(x)\}$$

Autrement dit, $f(I)$ est l'ensemble des réels y qui admettent (au moins) un antécédent par f qui est dans I .

Exemple. • Avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a $f([1, 9]) = \dots$

- Avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) = \dots$
- Avec $f : x \mapsto \cos x$, on a $f(\mathbb{R}) = \dots$
- Avec $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$, on a $f(\mathbb{R}) = \dots$

Corollaire 7.2 – Rappel : corollaire du TVI

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I .

Pour tout $y \in f(I)$, il existe un **unique** $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Si $y \in f(I)$, on sait que y admet au moins un antécédent par f . Avec les conditions de ce corollaire, cet antécédent est unique. Autre façon de le dire : pour tout $y \in f(I)$, l'équation " $f(x) = y$ " admet une unique solution dans I .

Définition 7.3

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose $I \subset D$. On dit que f réalise une bijection de I sur J si :

Pour tout $y \in J$, il existe un **unique** $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

càd :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad f(x) = y$$

Le résultat suivant n'est pas à retenir : on le reverra plus loin dans un cadre plus général :

Corollaire 7.4 – Corollaire du corollaire du TVI

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Exemple. Dans chaque exemple ci-dessous, la fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I indiquée :

- La fonction $f : x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\dots$
- La fonction $f : x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $\dots$

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$?
- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$?

1.2 Définition de f^{-1}

Définition 7.5

Une fonction $f : I \rightarrow J$ est dite bijective si f réalise une bijection de I sur J .

Définition-Théorème 7.6

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction **bijective**. Pour tout $y \in J$, on note $g(y)$ l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$. On peut alors définir une fonction g de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g : J &\rightarrow I \\ y &\mapsto g(y) \end{aligned}$$

La fonction g est appelée la fonction réciproque de f .

Notation. La fonction réciproque de f est unique. Cette fonction est notée f^{-1} :

$$\begin{aligned} f^{-1} : J &\rightarrow I \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Remarque. La fonction f^{-1} est en quelque sorte "l'inverse de f " :

Théorème 7.7

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective.

$$\forall y \in J \quad \forall x \in I \quad \boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$$

Exemple. On définit ci-dessous des fonctions $f : I \rightarrow J$. Chaque fonction f est continue, strictement monotone et vérifie $J = f(I)$, donc f est une bijection de I sur J , ou encore f est bijective. Ainsi, chaque fonction f admet une fonction réciproque :

Étant donné la fonction f suivante...

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

... la fonction réciproque de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \dots &\rightarrow \dots \\ x &\mapsto \dots \end{aligned}$$

Étant donné la fonction f suivante...

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

... la fonction réciproque de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \dots &\rightarrow \dots \\ x &\mapsto \dots \end{aligned}$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on note id_A la fonction :

$$\begin{aligned}\text{id}_A : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x\end{aligned}$$

C'est la fonction identité sur A .

Théorème 7.8

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective (et donc $f^{-1} : J \rightarrow I$). On a :

$$\begin{aligned}f^{-1} \circ f &= \text{id}_I & \text{i.e.} \quad \forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) &= x \\ f \circ f^{-1} &= \text{id}_J & \text{i.e.} \quad \forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) &= y\end{aligned}$$

Remarque. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors, pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$, on a :

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_f &\iff y_0 = f(x_0) \\ &\iff x_0 = f^{-1}(y_0) \\ &\iff (y_0, x_0) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}\end{aligned}$$

Or, partant du point (x_0, y_0) , on obtient le point (y_0, x_0) en échangeant x_0 et y_0 , ce qui revient à faire une symétrie selon la droite d'équation $y = x$. En particulier, la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ se déduit de la courbe $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1.3 Théorème de la bijection monotone et dérivée de f^{-1}

Théorème 7.9 – Théorème de la bijection monotone

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application **continue** et **strictement monotone** sur I . Alors :

- L'ensemble $f(I)$ est un intervalle, qu'on note J dans la suite.
- f réalise une bijection de I sur J .
- La fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f .

Démonstration. Admis. □

Théorème 7.10 – Dérivée de f^{-1}

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective.

1. Pour tout $y \in J$, la fonction f^{-1} est dérivable en y si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Lorsque cela est vérifié, on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

2. Plus généralement, si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration. Admis pour le moment. □

Exemple. On utilisera le Théorème 7.10 tout au long de ce cours pour calculer les dérivées de fonctions réciproques.

2 Logarithme et exponentielle

2.1 Logarithme

Définition-Théorème 7.11 – Logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie comme étant l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

On verra dans le chapitre suivant que définir la fonction $\ln$ de cette manière revient à poser, pour tout $x > 0$:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Théorème 7.12 – Propriétés graphiques / analytiques de $\ln$

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
- $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$
 $\ln$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

Théorème 7.13 – Propriétés algébriques de $\ln$

Soit $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration. On ne montre que la propriété encadrée (dite fondamentale), le reste s'en déduit aisément.

□

Définition 7.14 – Logarithme en base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a , noté $\log_a$, la fonction définie par :

$$\log_a : x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

La fonction $\log_a$ vérifie les mêmes propriétés algébriques que $\ln$, à savoir le Théorème 7.13. La principale différence est qu'on a $\log_a(a) = 1$ et même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log_a(a^n) = n$. En physique ou en SI, on emploie surtout la fonction $\log_{10}$, tandis qu'en informatique on emploie plutôt $\log_2$.

2.2 Exponentielle

$\ln$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\ln$ admet une fonction réciproque.

Définition 7.15

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est définie comme étant la réciproque de la fonction $\ln$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $e^x = \exp(x)$.

En particulier, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \dots \quad \forall y \in \dots \quad y = e^x &\iff x = \ln y \\ \forall x \in \dots \quad e^{\ln x} = x &\quad \text{et} \quad \forall x \in \dots \quad \ln e^x = x \end{aligned}$$

Bien que $\ln$ est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, on définit $\exp$ comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et non de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Toutefois, on retiendra qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 7.16 – Propriétés graphiques / analytiques de $\exp$

- $e^0 = 1$
- $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
 $\exp$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Démonstration. On ne montre que la seconde assertion.

□

Théorème 7.17 – Propriétés algébriques de $\exp$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

Démonstration. En utilisant les propriétés de la fonction $\ln$.

□

Notation. On note $e = \exp(1) \approx 2.71828$. Le réel e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.

La notation e^x pourrait conduire à une ambiguïté. Par exemple si $x = 3$, est-ce que e^3 désigne $\exp(3)$ ou bien $e \times e \times e$? En réalité, grâce à la propriété fondamentale, ces deux valeurs coïncident :

$$\exp(3) = \exp(1 + 1 + 1) = \exp(1) \times \exp(1) \times \exp(1) = e \times e \times e$$

On peut donc noter e^3 sans ambiguïté. C'est pour cette raison qu'on utilise la notation e^x pour $\exp(x)$!

3 Puissance

On s'intéresse tout d'abord à la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ dans le cas le plus général. Selon la valeur de α , l'ensemble D_f ne sera pas le même et on définira x^α différemment. Par contre, le résultat suivant est valable pour tout α :

Théorème 7.18

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur D_f et :

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

3.1 Fonction puissance entière

Définition 7.19 – $x \mapsto x^m$ avec $m \in \mathbb{Z}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction puissance n par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$$

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}}$$

3.2 Fonction puissance rationnelle (dont racine n -ième)

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la fonction $f : x \mapsto x^{2p+1}$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$, i.e. sur $\mathbb{R}$. En particulier, f admet une fonction réciproque :
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $g(x) = x^{2p}$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+)$, i.e. sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, g admet une fonction réciproque :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^{\frac{1}{2p+1}}$$

$$g^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^{\frac{1}{2p}}$$

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve aussi l'écriture $\sqrt[n]{x}$ à la place de $x^{\frac{1}{n}}$.

- Si $n \in 2\mathbb{N} + 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ correspond à l'unique réel t tel que $t^n = x$.
- Si $n \in 2\mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{x}$ correspond à l'unique réel positif t tel que $t^n = x$.



$x^{\frac{1}{2p}}$ n'a de sens que si $x \geq 0$, par contre $x^{\frac{1}{2p+1}}$ a un sens pour tout réel x !

Remarque ($x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$). Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$, avec p et q premiers entre eux, on peut définir la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ comme

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

On a donc $f = g \circ h$ avec $g : x \mapsto x^p$ et $h : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$. Les ensembles de définitions et de dérivabilité de f sont à déterminer au cas par cas, selon la parité et le signe des entiers p et q .

3.3 Fonction puissance réelle

Définition 7.20 – $x \mapsto x^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$$

Remarque. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, la fonction p_α coïncide (sur $\mathbb{R}_+^*$) avec les fonctions puissances vues précédemment.

Si α est égal (par exemple) à 2, alors la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est en fait la fonction carrée définie par $f(x) = x \times x$, et est définie sur $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{R}_+^*$). Cependant, si α peut prendre une valeur (réelle) non rationnelle, il faut partir du principe que $x \mapsto x^\alpha$ représente la fonction p_α ci-dessus, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.



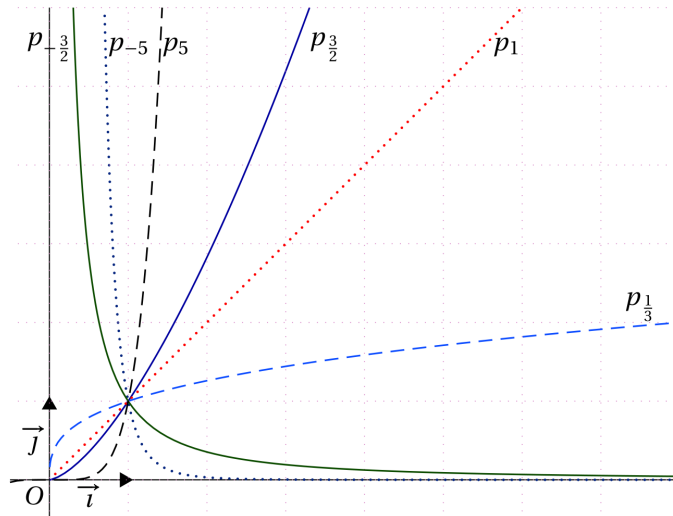
Face à toute écriture du type x^y avec $x > 0$ et y un **réel "quelconque"** (i.e. qui peut être non rationnel), il faut **systématiquement** utiliser la réécriture :

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x}}$$

Théorème 7.21 – Dérivée de $x \mapsto x^\alpha$

p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$p'_\alpha(x) = \frac{1}{x} \alpha e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$



3.4 Fonction puissance x (ou exponentielle généralisée)

Étant donné $a > 0$, on peut définir la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \dots$

Cette notation est cohérente avec la fonction exponentielle : lorsque $a = e$, en effet, $a^x = e^{x \ln e} = e^x$.

Théorème 7.22

Soit $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a^x a^y = a^{x+y}} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad \boxed{(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x} \quad a^x b^x = (ab)^x$$

Démonstration. En utilisant la définition de a^x et les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. □

4 Croissances comparées

Les propriétés dites “croissances comparées” permettent de lever certaines formes indéterminées dans un calcul de limites.

Théorème 7.23 – Croissances comparées

Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

1. Croissances comparées en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = +\infty$
2. Croissances comparées en $-\infty$ et 0 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^\gamma x^\beta = 0$

On peut apprendre ces formules, mais il est plus intéressant de retenir ce principe général : lorsqu'on obtient une *forme indéterminée*¹ impliquant des expressions de la forme $e^{\alpha x}$, x^β et $(\ln x)^\gamma$, la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance, qui l'emporte sur la fonction logarithme.



Les réels α, β, γ ne doivent pas dépendre de x !

7.24



Calculer la limite de $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution.

5 Fonctions circulaires

Théorème 7.25

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin x$$

1. Pour les croissances comparées, elles seront de la forme $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Rappel : la fonction tangente a pour ensemble de définition :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$$

Théorème 7.26 – Propriétés graphiques / analytiques de tan

- La fonction tangente est continue et dérivable sur $D_{\tan}$ et

$$\forall x \in D_{\tan} \quad \tan'(x) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

En particulier, tangente est strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$
 $x > -\frac{\pi}{2}$ $x < \frac{\pi}{2}$

Comme tan est π -périodique, la fonction tan est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans $D_{\tan}$ mais pas sur $D_{\tan}$ tout entier (ou même une réunion de deux de ces intervalles).

6 Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction arcsinus

La fonction sinus est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sur l'intervalle $\sin \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$, i.e. sur $[-1, 1]$.

Définition 7.27 – Fonction arcsinus

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de la fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$. Elle est notée :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

Théorème 7.28 – Propriétés graphiques de arcsin

- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ $\arcsin(0) = 0$ $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall y \in [-1, 1] \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$
- arcsin est impaire.
- arcsin est strictement croissante.
- arcsin est continue (sur $[-1, 1]$).

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Théorème 7.29 – Identités avec arcsin

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \arcsin(\sin(x)) = x &\iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \forall y \in [-1, 1] \quad \sin(\arcsin(y)) &= y \\ \forall y \in [-1, 1] \quad \cos(\arcsin y) &= \sqrt{1-y^2} \\ \arcsin \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\quad \text{et} \quad \forall y \in]-1, 1[\quad \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

Démonstration.

□



$\arcsin(\sin x)$ n'est pas toujours égal à x ! Par exemple, pour $x = \pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$$

En revanche, $\sin(\arcsin(y))$ est toujours égal à y (seulement pour y dans $[-1, 1]$ puisque la fonction arcsinus n'est définie que sur $[-1, 1]$).

Exemple. Que vaut $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

6.2 Fonction arccosinus

La fonction cosinus est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0, \pi]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur l'intervalle $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Définition 7.30 – Fonction arccosinus

La fonction arccosinus, notée $\arccos$, est la fonction réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Théorème 7.31 – Propriétés graphiques de arccos

- $\arccos(-1) = \pi$ $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ $\arccos(1) = 0$
- $\forall y \in [-1, 1] \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi$
- arccos n'est ni paire ni impaire.
- arccos est strictement décroissante.
- arccos est continue sur $[-1, 1]$.

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Théorème 7.32 – Identités avec arccos

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arccos(\cos x) = x \iff x \in [0, \pi]$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos y) = y$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\arccos \text{ est dérivable sur }]-1, 1[\quad \text{et} \quad \forall y \in]-1, 1[\quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Démonstration. De même que pour arcsin, les deux premières assertions découlent du fait que arccos et $\cos|_{[0, \pi]}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. Pour la troisième assertion, on adapte la preuve précédente à arccos : le calcul montre que pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$|\sin(\arccos y)| = \sqrt{1 - y^2}$$

Or, comme $\arccos y \in [0, \pi]$, on a $\sin(\arccos y) \geq 0$, d'où on a bien $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$. Pour la dernière assertion, on obtient de même que arccos est dérivable en tout $y \in]-1, 1[$ et

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \square$$



arccos(cos x) n'est pas toujours égal à x ! Par exemple pour $x = 2\pi \notin [0, \pi]$, on a

$$\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$$

En revanche, $\cos(\arccos y)$ est toujours égal à y (seulement pour y dans $[-1, 1]$ puisque la fonction arccosinus n'est définie que sur $[-1, 1]$).

6.3 Fonction arctangente

La fonction tangente est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur l'intervalle $\tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$.

Définition 7.33 – arctangente

La fonction arctangente, notée $\arctan$, est la fonction réciproque de $\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Théorème 7.34 – Propriétés graphiques de $\arctan$

- $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\arctan(0) = 0$ $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\forall y \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$
- $\arctan$ est impaire.
- $\arctan$ est strictement croissante.
- $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2}$

Théorème 7.35 – Identités avec $\arctan$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan(\tan(x)) = x \iff x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(y)) = y$$

$$\arctan \text{ est dérivable (sur } \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Démonstration. De même, les deux premières assertions découlent du fait que $\arctan$ et $\tan \big|_{\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. La troisième assertion se démontre avec le Théorème 7.10. $\square$

Méthode

Pour résoudre une équation qui fait intervenir $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$:

1. On choisit une fonction parmi $\cos$, $\sin$, $\tan$ à appliquer pour simplifier l'équation.
2. Au brouillon, on vérifie scrupuleusement dans quels cas on a équivalence.
3. Sur la copie, on fait éventuellement une disjonction de cas pour résoudre par équivalence.

7.36 ★★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(2x) = \arccos x$.

Solution.

7 Fonctions hyperboliques

7.1 Fonctions ch et sh

Définition 7.37

On définit :

- la fonction cosinus hyperbolique, notée ch :
- la fonction sinus hyperbolique, notée sh :

$$\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



Ne pas confondre les expressions ci-dessus avec les formules d'Euler ! Notamment, le nombre i n'intervient pas dans les définitions ci-dessus.

Théorème 7.38 – Propriétés graphiques de ch et sh

- $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{sh}(0) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch } x \geq 1$
- ch est paire et sh est impaire.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (cf encadré suivant pour la preuve).
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sh}(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{ch}(x) = +\infty$

Théorème 7.39 – Identités avec ch et sh

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

sh et ch sont continues et dérivables (sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x) \quad \text{et} \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] \\ &= \frac{1}{4} [e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)] \\ &= \frac{1}{4} \times 4 = 1 \end{aligned}$$

Le reste des propriétés est évident au vu des définitions de ch et sh . □

7.2 Fonction th

Définition 7.40 – Tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th :

$$\begin{aligned} \operatorname{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \end{aligned}$$

Théorème 7.41 – Propriétés graphiques de th

- $\operatorname{th}(0) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \operatorname{th} x < 1$
- th est impaire.
- th est strictement croissante (cf encadré suivant pour la preuve).
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{th}(x) = \pm 1$

Théorème 7.42 – Identités avec th

th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$$

8 Fonctions exponentielles complexes

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

Théorème 7.43

Soit $\varphi : I \rightarrow \boxed{\mathbb{C}}$ une fonction dérivable.

La fonction $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\varphi(x)} \end{cases}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \varphi'(x)e^{\varphi(x)} \end{cases}$

En pratique, le calcul est donc similaire aux exponentielles réelles : il suffit de dériver la fonction dans l'exponentielle (en considérant i comme une constante).

Exemple. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto e^{x+ix^2}$.

Exemple. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $f : t \mapsto e^{i\omega t}$.

9 Méthodes pour les exercices

Méthode – Mnémotechnie pour arccos, arcsin et arctan

- Retenir l'allure des courbes des fonctions arccos, arcsin et arctan permet de retrouver les encadrés "propriétés graphiques de arccos / arcsin / arctan". En cas de doute, refaire au brouillon la symétrie des courbes de cos / sin / tan qui a permis de les construire.
- Les formules $\arccos(\cos x) = x$, $\arcsin(\sin x) = x$ et $\arctan(\tan x) = x$ sont piégeuses et ne marchent que pour certains x . Pour les reconnaître, remarquez qu'on lit deux fois d'affilée "cos", "sin" et "tan" !
- Par contre, $\cos(\arccos y) = y$ est toujours vrai, pour tout y pour lequel cela a un sens. Idem pour $\sin(\arcsin y)$ et $\tan(\arctan y)$.
- On peut retrouver les expressions de $\arccos'(y)$, de $\arcsin'(y)$ et de $\arctan'(y)$ grâce à la formule $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ avec $f = \cos$, $f = \sin$ ou $f = \tan$.